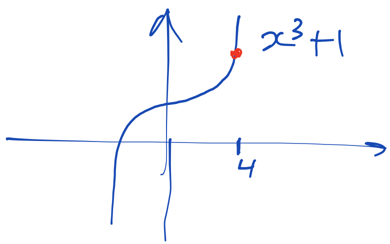
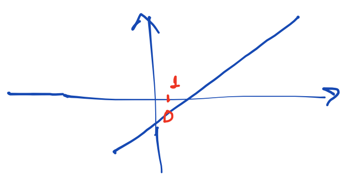
Раньше $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Маленькая математика: производные

Предел в точке





① $f(x) = x^3+1.$

$$\lim_{x\to 4} (x^3+1) = f(4) = 65.$$

② $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x-2) = 1-2 = -1$$

Скорость

Хочется численно измерять, насколько быстро функция растет или убывает.

Вспомним физику. Пусть материальная точка движется по прямой, ее координата зависит от времени как $x(t)$. Тогда скорость точки в момент времени t_0 определяется как

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

В принципе логично: мгновенная скорость — это скорость на очень маленьком временном промежутке (t очень близок к t_0). А если промежуток маленький, то скорость можно считать постоянной, и тогда она вычисляется как изменение координаты делить на изменение времени.

Производная

Так же мерят скорость и у абстрактных функций:

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Предел в правой части зависит от x. Таким образом, получается новая функция от x, которую называют *производной* функции f.

Как считать производную по определению?

Попробуем сосчитать у какой-нибудь простой функции:

$$y = x$$

$$y'(x) = \lim_{t \to x} \frac{y(t) - y(x)}{t - x} = \lim_{t \to \infty} \frac{t - x}{t - x} = \lim_{t \to \infty} 1 = 1. \quad \square$$

А что насчет $y = x^2$?

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$$y'(x) = \lim_{t \to x} \frac{t^2 - x^2}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t-x)(t+x)}{t - x} = \lim_{t \to x} (t + x)$$

$$= x + x = 2x.$$

$\square$

Теперь $y = x^n$

$$y'(x) = \lim_{t\to x} \frac{t^n - x^n}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{\cancel{(t-x)}(t^{n-1} + t^{n-2}x + \ldots + x^{n-1})}{\cancel{t-x}}$$

$$= \lim_{t\to x} \underbrace{(\underbrace{t^{n-1}}_{n-1} + \underline{t^{n-2}x} + \ldots + \underbrace{x^{n-1}}_{0})}_{n}$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{n} = \underline{x^{n-1}\cdot n}$$

$$t^n - x^n = (t-x)\cdot(t^{n-1} + t^{n-2}\cdot x + t^{n-3}\cdot x^2 + t^{n-4}\cdot x^3 + \ldots + t\cdot x^{n-2} + x^{n-1})$$

Проверим эту формулу!

	t^{n-1}	$t^{n-2}x$	$t^{n-3}x^2$	$\ldots$	tx^{n-2}	x^{n-1}
t	t^n	$\cancel{t^{n-1}x}$	$\cancel{t^{n-2}x^2}$	$\ldots$	$\cancel{t^2x^{n-2}}$	$\cancel{tx^{n-1}}$
$-x$	$\cancel{-t^{n-1}x}$	$\cancel{-t^{n-2}x^2}$	$\cancel{-t^{n-3}x^3}$	$\ldots$	$\cancel{-tx^{n-1}}$	$-x^n$

$= t^n - x^n$

Что там еще бывает? $y = C$, где C — любое постоянное число

$$y'(x) = \lim_{t \to x} \frac{C - C}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{0}{t - x} = 0.$$

Число e

Число e определяется как

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Это равенство называют еще «вторым замечательным пределом».

Чтобы доказать, что этот предел существует и конечен, нужно потрудиться. Мы не будем этого делать.

Несмотря на то, что это число возникло как какой-то странный предел, у него до сих пор находятся все новые неожиданные свойства. Одно из них вы хорошо знаете:

Теорема

$$(e^x)' = e^x.$$

Доказательство $(e^x)' = e^x$

$y = e^x$

$t \to x$

$h = t - x \to 0$

$$y'(x) = \lim_{t\to x} \frac{e^t - e^x}{t-x} = e^x \lim_{t\to x} \frac{e^{t-x} - 1}{t-x} = e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}$$

$$= \left| \begin{array}{l} n = e^h - 1 \\ n \to e^0 - 1 = 0 \end{array} \right| = e^x \lim_{n\to 0} \frac{n}{\ln(n+1)} = \left| \begin{array}{l} m = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n = \frac{1}{m} \\ m \to +\infty \end{array} \right|$$

$n+1 = e^h$

$h = \ln(n+1)$

$$= e^x \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{m}}{\ln\left(\frac{1}{m}+1\right)}$$

$$= e^x \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m \ln\left(\frac{1}{m}+1\right)} = e^x \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\ln \boxed{\left(\frac{1}{m}+1\right)^m}} \quad \boxed{\left(\frac{1}{m}+1\right)^m} \to e$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{\ln e} = e^x. \qquad \square$$

Свойства производной

Ну, вот они слева направо:

Теорема (сложения)

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

Доказательство.

$$(f(x)+g(x))' = \lim_{t\to x} \frac{f(t)+g(t)-f(x)-g(x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x} \left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \frac{g(t)-g(x)}{t-x} \right) = f'(x) + g'(x).$$

$\square$

Теорема (умножения)

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

Доказательство.

$$(f(x)g(x))' = \lim_{t \to x} \frac{f(t)g(t) - f(x)g(x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{f(t)g(t) - f(x)g(t) + f(x)g(t) - f(x)g(x)}{t-x}$$

$\to f'(x)g(x)$ $\to f(x)g'(x).$

$$= \lim_{t \to x} \frac{(f(t)-f(x))g(t) + f(x)(g(t)-g(x))}{t-x}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$\square$

Производная сложной функции

Теорема

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Доказательство.

$$(f(g(x))' = \lim_{t \to x} \frac{f(g(t)) - f(g(x))}{t-x} = \lim_{t \to x} \left(\underbrace{\frac{f(g(t)) - f(g(x))}{g(t)-g(x)}}_{(*)} \cdot \underbrace{\frac{g(t)-g(x)}{t-x}}_{g'(x)} \right)$$

$(*)$: $a = g(t) \to b$, $b = g(x)$.

$$(*) = \lim_{a \to b} \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(b) = f'(g(x)).$$

$\square$

Производная логарифма

Формула производной композиции неожиданно полезна в теории. Вот одно применение:

Теорема

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Доказательство.

$\frac{d}{dx}$!

$$x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = 1$$

$$x \cdot (\ln x)' = 1$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

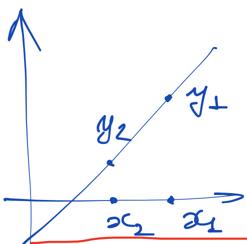
$\square$

Геометрический смысл производной

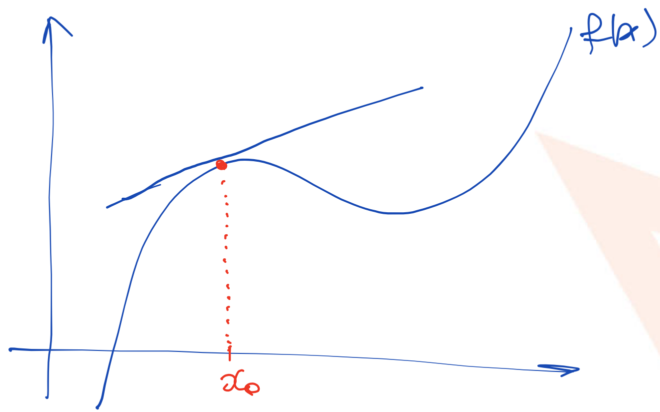
Производная f в точке x_0 численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику f в точке x_0.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \angle[\ell(x_0), \overrightarrow{Ox}]$$

$$f'(x_0) = \lim_{t \to x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}.$$



$$\boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



Физический смысл производной

Пусть координата материальной точки является функцией от времени: x = x(t).
Тогда мгновенная скорость этой точки — производная координаты.
Мгновенное ускорение — производная скорости.

$$x'(t) = v(t), \quad v'(t) = a(t).$$

Фактически, мгновенные скорость и ускорение определяются ровно как производные функции координаты и скорости соответственно.

$$a(t) = \lim_{u \to t} \frac{v(u) - v(t)}{u - t}$$